# KONSTRUKCE TROJÚHELNÍKU V GEOGEBŘE

## Anotace

Pomocí posuvníků žák v programu GeoGebra sestrojí trojúhelník zadaný třemi stranami a vyhodnotí dynamické vlastnosti vzniklé konstrukce. Následně sestrojí trojúhelník zadaný dvěma stranami a úhlem naproti jedné z nich. Materiál je určen pro úplné začátečníky žáky i učitele.

## Autor

Jméno a příjmení:	Miroslav Staněk
Pracoviště:	SŠ André Citroéna Boskovice
E-mail:	stanek@skolaac.cz

### Informace o výukovém materiálu

- Typ materiálu: cvičení
- Škola: střední odborná škola tříletý učební obor
- Ročník: 2.
- Metody: individuální práce žáka pod vedením učitele

### Zařazení

- Vzdělávací obor: Matematika a její aplikace
- Tematický okruh: Planimetrie
- Očekávané výstupy:
  - užívá pojmy a vztahy: bod, přímka, rovina, odchylka dvou přímek, vzdálenost bodu od přímky, vzdálenost dvou rovnoběžek, úsečka a její délka;
  - o určí vzájemnou polohu přímky a kružnice;
  - rozliší shodné a podobné trojúhelníky a své tvrzení zdůvodní užitím vět o shodnosti a podobnosti trojúhelníků;
  - při řešení úloh účelně využívá digitální technologie a zdroje informací, užívá jednotky délky a obsahu, provádí převody jednotek délky a obsahu;

### Mezipředmětové vztahy

- Vzdělávací obor: Strojní obrábění
- Tematický okruh: Ruční zpracování kovů a vybraných nekovových materiálů
- Očekávané výstupy:
  - měří úhly úhelníky a úhloměry, kontroluje tvar šablonami a provádí základní měření vzájemné polohy ploch a jejich geometrického tvaru;
  - o zpracovává kovové a vybrané nekovové materiály ručním obráběním.

## Časová dotace

- Výuka: 45 minut
  - Příprava: 10 minut (neznalost GeoGebry 45 min)

### Pomůcky, hardware a software

- Učitel: digitální technologie s dostatečnou velikostí obrazovky, program GeoGebra online či offline (21. 7. 2022) či jiný grafický software + projekční zařízení
- Žák: digitální technologie s dostatečnou velikostí obrazovky, program GeoGebra online či offline (21. 7. 2022) či jiný grafický software

### Zdroje

• <u>https://www.geogebra.org/?lang=cs</u>, 21. 7. 2022

### Potřebné vstupní znalosti a dovednosti

### Matematika

• má alespoň rámcovou představu, jak sestrojit trojúhelník pomocí stran a úhlů

### Digitální dovednosti

• základy práce s digitálními technologiemi

### Vzdělávací cíle

### Matematika

- zopakuje si konstrukce trojúhelníku;
- rozliší shodné a podobné trojúhelníky;
- porozumí závislosti řešení na hodnotách zadaných rozměrů.

### Digitální kompetence

- ovládá běžně používaná digitální zařízení, aplikace a služby;
- využívá digitální technologie, aby si usnadnil práci, zautomatizoval rutinní činnosti, zefektivnil či zjednodušil své pracovní postupy a zkvalitnil výsledky své práce;
- chápe význam digitálních technologií pro lidskou společnost, seznamuje se s novými technologiemi, kriticky hodnotí jejich přínosy a reflektuje rizika jejich využívání.

### Digitální dovednosti

- získá základy práce při konstrukcích v rovině v programu GeoGebra;
- získá vhled do využití digitálních technologií při řešení problémů z praxe a nebojí se experimentovat.

### Přínos využití digitálních technologií

Použití softwaru při konstrukcích, využití dynamických vlastností konstrukce a vhled do vztahů mezi zadanými parametry trojúhelníku.

## Metodická poznámka

Žáci pracují individuálně na svých zařízeních. Je vhodné postup první úlohy promítat projektorem či interaktivní tabulí. Pokud je ale menší třída a žáci jsou schopní, stačí obcházet a radit slabším. Často šikovnější žáci těm slabším poradí dřív, než tam dorazí učitel.

## Popis materiálu (vzdělávací aktivity)

Materiál je primárně určen pro učební obory, které potřebují orýsovat materiál a vystřihnout útvar (obráběči kovů, krejčí, výrobce obuvi apod.). Základy GeoGebry a dynamických konstrukcí jsou ale vhodné pro všechny žáky z důvodu lepšího pochopení geometrických pojmů a vztahů.

Pomocí posuvníků demonstruje dynamické vlastnosti konstrukce trojúhelníku v programu GeoGebra. Vyučující vede žáky, kteří nemají z GeoGebrou žádnou zkušenost.

## Postup práce

### Otevření prostředí GeoGebra

Na stránce <u>https://www.geogebra.org/?lang=cs</u> otevřeme **Výkonné matematické aplikace – Geometrie**.



Odstraníme číselné osy a mřížku – rozklikneme symbol ozubeného kolečka v pravém horním rohu zobrazené plochy a v nabídce nastavíme **Bez mřížky** a zrušíme označení **Zobrazit osy**.





#### Úloha 1: Sestrojte trojúhelník ABC, máme-li zadány strany a, b, c.

#### Řešení úlohy

#### a) Vytvoříme posuvníky pro a, b a c.

V panelu nástrojů ve čtvrté oblasti **Rozměry** klikneme na **posuvník**. Pokud nemůžeme **posuvník** najít, klikneme dole v nabídce na **VÍCE**. Pak klikneme do rýsovací plochy – nejlépe nalevo nahoru. Zobrazí se nám nabídka parametrů posuvníku. Upravíme min. na 0 a max. na 10. Rozměr strany nám bude v tomto rozsahu stačit. Žáci pak mohou, budou-li mít čas, s nastavením posuvníků experimentovat. Po odkliknutí OK se nám zobrazí posuvník a.



Totéž provedeme ještě dvakrát pro posuvníky b a c. Protože máme aktivován nástroj posuvník, nemusíme na něj opakovaně klikat a můžeme posuvníky přímo "sázet" na rýsovací plochu.

C C A http://www.geogetarang/geometry     C C      C C     C C     C C     C C     C C     C C     C C     C C     C C     C C     C C     C	\land Geomet	rrie - GeoGebra × +						- ø ×
E Ceaceba Geometre   Image: Comparison of the product of the prod	$\leftarrow \  \  \rightarrow$	C O A	https://www.geogebra.org/geo	metry			ŝ	∞ ± 0 ≡
Attach     Attach <td>=</td> <td>GeøGebra Ge</td> <td>ometrie</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>&lt;</td> <td>III PŘIHLÁSIT</td>	=	GeøGebra Ge	ometrie				<	III PŘIHLÁSIT
Minožina bodů (1) III (2) Sem zadejte hledaný výraz Hi (2) je (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2)	Algebra Nastroje	Základní nástroje Lihazovilko Nový bod Ús Přímka Mnohočněník Knům úpravy Úpravy Uprat objekty Zobrazť / skrif Zobraz vyterat objekty Zobrazť / skrif Zobraz ropsi ot Čupravy Střed Pohybovať s řez Komstrukce Střed Komice Osa Komské Osa úhu Tečny	sečka Socianá dom a co czt / skrýt opot provat provat ú usečky ú secky y z bodu	a = 1 b = 1 c = 1	-			پ ه و
	:: .	Množina bodů		🧧 🛱 🚔 📾	A 🖬 🖬	o. 🧑 🙌 🗐	^ 🗶 🚔 🔃	(1 d)) 23:11

Pokud chceme posuvníky srovnat, musíme opustit nástroj **posuvník** a aktivovat nástroj **ukazovátko** – první úplně nahoře. Pak pouhým uchopením posuneme posuvník, kam budeme chtít.



📣 Geomet	rrie - GeoGebra × +				- 0 ×
$\leftarrow \rightarrow$	C A https://www.geo	gebra.org/geometry		☆	⊚ ⊻ Ø ≡
=	Ge@Gebra Geometrie			<	III PŘIHLÁSIT
Algebra Riastroje	Základní nástroje Vukazovátko Nový bod Přímka Mnohočhelník Úvazovátko Přímka Mnohočhelník Střed Nový Vybrat objekty Zoušit Pohybovať Nový Pohybovať Střed Kostrukce Střed Kostrukce Cosa úsečky Množna bodů	a = 5.1 b = 4.8 c = 5.4			
م 🗄	Sem zadejte hledaný výraz	H 💽 🧮 🗉 🕿 😁 🍐 🖩	📴 🧕 🧶 💷	^ 🤿 👄 🚱 🛚	■ <i>信</i> . (小) 23-22 16.07.2022 ③

#### Nastavíme si hodnoty posuvníků někde doprostřed (stále aktivován nástroj ukazovátko).

#### b) Vlastní konstrukce

Nyní můžeme začít konstruovat. Počítač automaticky značí body podle abecedy, tedy první bude A, druhý B, proto je výhodné začít konstrukci stranou c, tedy AB.

Protože máme zadán rozměr jednotlivých stran trojúhelníku, klikneme na nástroj z šestého oddílu Přímky **Úsečka s pevnou délkou**.

Po kliknutí na rýsovací plochu se nám zobrazí bod A a objeví se nabídka nastavení délky, kde nastavíme c.

📣 Geome	etrie - GeoGebra X	+											- Ø ×
$\leftarrow \rightarrow$	C	O A https://www	.geogebra.o	<b>rg</b> /geome	etry								☆ ⊗ ± © ≡
=	GeøGebra	Geometrie											PŘIHLÁSIT
Algebra Algebra Nástroje	Agebra   Agebra   Agebra   Nový bod   Průsečki   Batrop   Přípogli / Přípogli / Přípogli / Decka bod   Přípogli / Přípogli / Přípogli / Decka bod   Pílinky   Úsečka Usečka s pevnou délkou   Decka   Polopřímka   Vektor    Vektor   Vektor									¢ (@) (!)			
				123	f(x) Al	3C #	&¬						×
				x	у	z	π	7	8	9	×	÷	
				1::1 <sup>2</sup>	σ"	√.::	е	4	5	6	+	-	
	<	>	≤	2	1	2	3	=	×				
				(	)		ŀ	0	ŀ	<	>	÷	
-	O Sem zadejte hledaný	výraz	⊟ŧ	0	<b>i</b>		📟 🥚		o 📀	- 41	۵	1	へ 🦔 👄 🖾 🐜 🦟 🕬 23-24 📑

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Miroslav Staněk.

Koordinováno a recenzováno pracovní skupinou Národního kabinetu Matematika a její aplikace.

Dostupné z Metodického portálu www.rvp.cz, ISSN: 1802-4785. Provozuje Národní pedagogický institut České republiky.

🔶 Geome	etrie - GeoGebra × +		- 0 >
$\leftarrow \rightarrow$	C A https://www.geogebra.org/geometry	ជ	⊚ ± Ø ≡
≡	GeoGebra Geometrie		< III PŘIHLÁSIT
Algebra Algebra Nastroje	A Prove bod Prosective Bod na objektu Propoji / Betremy Korteny Bod na objektu Pitroky Betremy Korteny Betremy Bod na objektu Pitroky Betremy Korteny Betremy Betre		¢
	Kružnice		@ @ ::

Po odkliknutí OK se objeví strana AB. Její délka se bude měnit s nastavením hodnoty posuvníku c.

Nyní musíme najít vrchol C.

Bod C leží ve vzdálenosti a od vrcholu B a zároveň ve vzdálenosti b od vrcholu A. Tedy na kružnici se středem B a poloměrem a a zároveň na kružnici se středem A a poloměrem b.

K sestrojení kružnic použijeme nástroj ze sedmého oddílu Kružnice **Kružnice daná středem a poloměrem** (je to druhá ikonka). Klikneme na bod A a v nabídce nastavíme poloměr b.

\land Geomet	trie - GeoGebra X	+										- 0 ×
$\leftarrow \rightarrow$	C	O A https://www.ge	ogebra.org/geome	etry								☆ ♡ ⊻ Ø ≡
=	GeøGebra	Geometrie										<
Ubecka by permoudékou       Primka permoudékou         Polopfirmka Vetor Vetor z bodu       Image dana středem a poloměrem         Polopfirmka Lomená čara Lineání regrese       Kružnice daná středem a poloměrem         Kružnice       Image dana Ktrodne         Kružnice daná Ktrodne       Image dana středem         Polopfirmka Ktrodne       Image dana Ktrodne         Image dana Ktrodne       Image dana středem         Image dana Ktrodne       Image dana středem         Image dana Ktrodne       Image dana středem         Image date středem a dana středem       Image date středem         Image date středem a dana středem       Image date středem         Image date středem a date středem       Image date středem         Image date středem a date středem       Image date středem         Image date středem       Image date středem								¢ (Q) (1)				
			123	f(x) Al	BC #8	87						×
			x	у	Ζ	π	7	8	9	×	÷	
			1:11 <sup>2</sup>	"	√:::	е	4	5	6	+	-	
			<	>	≤	≥	1	2	3	=	×	
			(	)		•	0	•	<	>	←	
۲ <b>۲</b>	O Sem zadejte hledany	ý výraz	H 💽	<b>i</b>		📟 🧅		o 🕺	4	6	1	へ 🦔 🛥 🔯 😁 🧖 🕬 23:34 16.07.2022 📑



Totéž provedeme pro druhou kružnici. Klikneme na bod B a v nabídce nastavíme poloměr a.



Bod C je průsečíkem obou kružnic. Body si označíme pomocí nástroje z pátého oddílu Body **průsečík**. Klikneme na ikonu nástroje **průsečík** a pak na průsečíky obou kružnic. Systém oba body automaticky pojmenuje.



Pokud je dost času, je možné bod D přejmenovat. Aktivovat nástroj **ukazovátko**. Kliknutím na bod se objeví nabídka.



Kliknutím na tři svislé tečky napravo se otevře další a tam vybereme **nastavení**. V nastavení změníme název bodu.



Po zavření nabídky máme bod přejmenován. Popis bodu si **ukazovátkem** můžeme případně posunout, aby nám nezasahoval do čar.



Zbývá jen sestrojit trojúhelníky. Použijeme nástroj z osmého oddílu Mnohoúhelníky **mnohoúhelník**. Kliknutí na ikonku **mnohoúhelník** a na tři vrcholy trojúhelníku se zobrazí trojúhelník.



Pokud chceme u druhého trojúhelníku změnit barvu, stačí aktivovat nástroj **ukazovátko**, kliknout na trojúhelník a v nabídce vybrat **nastavení**.



#### Tam pak změnit barvu.



Máme dvě symetrická řešení.

Nyní je možno ukázat dynamičnost počítačových konstrukcí. Posouváním posuvníků je možno měnit zadání a ukázat případy existence či neexistence řešení (trojúhelníková nerovnost).



Otáčením kolečka myši lze měnit velikost obrázku. Nástrojem v oddílu Úpravy **Pohybovat** s nákresnou posouvat obrázek.







V následné diskuzi je možno diskutovat závislost počtu řešení na měnících se vstupních parametrech. Diskutovat pravidla shodnosti trojúhelníků (osová souměrnost). Je zde možno zopakovat i trojúhelníkovou nerovnost.

Teď si mohou žáci sami provést jinou konstrukci. Vhodné je dvě strany ponechat a přidat úhel.



#### Řešení úlohy

Pokud je dost času, je možné začít od začátku. Pokud je času málo, doporučuji odstranit **posuvník a** (kliknout ukazovátkem a označit symbol koše nebo označit a stisknout klávesu Delete) a nahradit jej posuvníkem β.



Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Miroslav Staněk.

Koordinováno a recenzováno pracovní skupinou Národního kabinetu Matematika a její aplikace.

Dostupné z Metodického portálu www.rvp.cz, ISSN: 1802-4785. Provozuje Národní pedagogický institut České republiky.

Použijeme nástroj z osmého oddílu Rozměry **Úhel dané velikosti**. Klikneme na Bod A, pak bod B a do zadaných parametrů nastavíme úhel  $\beta$ .



Nástrojem z oddílu Přímky polopřímka sestrojíme rameno úhlu.



Dále pokračujeme jako v předchozí konstrukci. Nastavíme si průsečíky, označíme je a sestrojíme trojúhelníky. Bod A můžeme zneviditelnit v **nastavení** – odstranit zatržení u **zobrazit objekt**.



Je vidět možnost až dvou různých nesouměrných řešení. Pro úplnost je vhodné sestrojit i úhel v dolní polorovině a zbývající symetrická řešení.



### Opět lze měnit zadané rozměry a pozorovat různé počty řešení.

#### Žáci si konstrukci mohou dodělat doma a učiteli výsledek svého snažení poslat.

## Metodická poznámka

Je možno úlohy upravit dle požadavků a potřeb výuky, například jiné způsoby zadání trojúhelníku.

### Hodnocení:

Vyučující obchází třídu a hodnotí snahu žáků. Je vhodné hodnotit přístup žáků k práci a jejich případný pokrok. Ne úspěšnost v konstrukci. Je třeba uvážit různé schopnosti žáků a dovednosti pracovat s počítačem, tedy různou startovní pozici jednotlivých žáků.

## Zkušenosti s použitím materiálu

Vyzkoušeno u učňovské třídy (obráběči kovů) 20–25 žáků. Žáci měli tablety a navzájem si radili. Zvládli bez problémů.

Rizikem je nutnost vhodného hardwaru (tablety nebo počítačová třída). Je pravděpodobné, že v případě větší diskuze či problémů při spouštění GeoGebry druhou konstrukci někteří žáci nestihnou dokončit. Možno dokončit doma na vlastním zařízení.

Vyučující musí zvážit, jakou třídu má, zda je schopen takovou hodinu zvládnout, a dle toho metody výuky i náplň hodiny upravit

## Další související materiály

Zatím žádné