

OBEČNÁ ROVNICE ELIPSY S PHOTOMATH (ZKRÁCENÁ VERZE)

Metodická poznámka

Během celé hodiny promítá učitel zadání příkladů. V okamžicích, kdy s žáky kontroluje výsledky nebo vysvětluje, přepíná kompletní text aktivity. Žáci pracují samostatně, případně spolupracují v lavicích.

Popis materiálu (vzdělávací aktivity)

Úloha 1: Najdi střed, vrcholy a ohniska elipsy dané rovnicí $(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 1$.

Rovnici upravíme do správného tvaru: $\frac{(x-2)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

Z rovnice víme: $S[2; -1]$, $a = 1$, $b = \frac{1}{2} \Rightarrow$ „ležatá“ elipsa

Excentricita: $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hlavní vrcholy: $A[3; -1]$, $B[1; -1]$.

Vedlejší vrcholy: $C[2; -0,5]$, $D[2; -1,5]$.

Ohniska: $E\left[2 + \frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right]$, $F\left[2 - \frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right]$.

Stejně jako u kružnice můžeme ve středové rovnici roznásobit závorky (a odstranit zlomky):

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad / \cdot a^2 b^2.$$

$$b^2(x-m)^2 + a^2(y-n)^2 = a^2 b^2$$

$$b^2(x^2 - 2mx + m^2) + a^2(y^2 - 2ny + n^2) = a^2 b^2$$

$$b^2 x^2 - 2b^2 mx + m^2 b^2 + a^2 y^2 - 2a^2 ny + n^2 a^2 = a^2 b^2$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2b^2 mx - 2a^2 ny + m^2 b^2 + n^2 a^2 - a^2 b^2 = 0$$

Tento tvar se většinou používá s jiným označením koeficientů:

$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0$ - **obecná rovnice elipsy** (ne každá takováto rovnice je rovnicí elipsy, podobně jako u kružnice)

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Martin Krynický.

Koordinováno a recenzováno pracovní skupinou Národního kabinetu Matematika a její aplikace.

Dostupné z Metodického portálu www.rvp.cz, ISSN: 1802-4785. Provozuje Národní pedagogický institut České republiky.

Bez zpětné úpravy nikdo nepozná, o jakou elipsu jde, ani zda je to vůbec elipsa.

Úloha 2: U elipsy dané rovnicí $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$ najdi střed a urči velikosti poloos.

Rovnici musíme upravit do středového tvaru:

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 4x^2 - 8x + y^2 + 4y + 4 = 0$$

$$4(x^2 - 2x) + y^2 + 2 \cdot 2y + 2^2 - 2^2 + 4 = 0$$

$$4(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + (y + 2)^2 - 2^2 + 4 = 0$$

$$4(x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 4 \cdot 1^2 - 2^2 + 4 = 0$$

$$4(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

$$(x - 1)^2 + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1 \quad \text{můžeme psát i jako: } \frac{(x - 1)^2}{1} + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1.$$

Elipsa má střed v bodě $S[1; -2]$, hlavní poloosa je $b = 2$, vedlejší poloosa je $a = 1$.

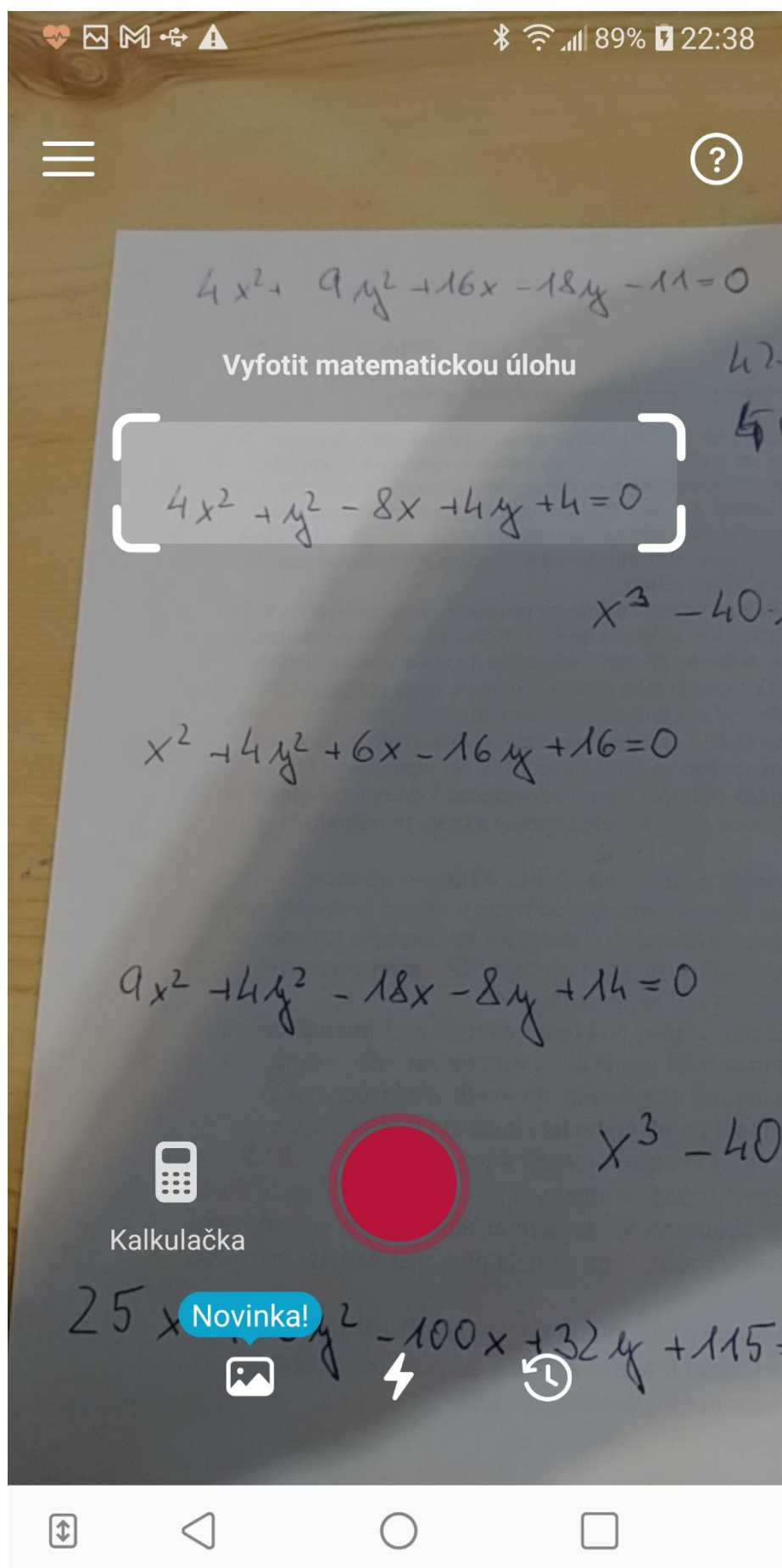
Předchozí příklad je nutné dělat napůl u tabule (jde o vytýkání před závorky a hlavně o jejich roznásobování), zbytek hodiny je určen samostatné práci.

Upravování rovnic kuželoseček je jednou z početně velmi náročných částí středoškolské matematiky. Pokud další příklady necháte dělat žáky ručně, stráví většinu času upravováním rovnic a hledáním chyb v těchto úpravách. Druhou možností je využít některý z nástrojů, které umí tyto úpravy provést za ně (zde je zvolen asi nejznámější z nich – Photomath). Studenti Photomath v naprosté většině znají (a mnozí se s její pomocí snaží podvádět), přesto je třeba říci, aby si aplikaci nainstalovali hodinu předem.

Obrázky výsledků aplikace Photomath ve zbytku hodiny jsou publikovány ve dvou velikostech. Větší obrázky obsahují informace důležité pro plnění zadaných úloh, menší obrázky pak zbytek výstupů programu, který se zadaných úloh netýká.

Úloha 3: U elipsy dané rovnicí $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$ najdi střed a urči velikosti poloos. Při řešení příkladu využij aplikaci Photomath.

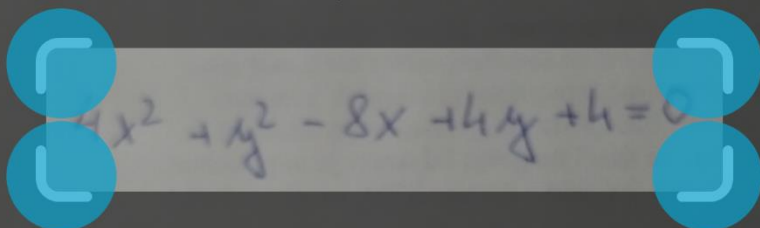
Princip použití aplikace: Mobilním telefonem vyfotografujeme zadání příkladu (na papíře, obrazovce, projektoru, ...), program se ho pokusí přepsat do matematické notace a vyřešit. Část zorného pole fotoaparátu, kterou se program pokusí zpracovat, je vyznačena obdélníčkem se zakulacenými rohy. Rozměry obdélníčku můžeme upravovat tažením prsty.



Aplikace zpracuje zadání a ukáže výsledky.



Ořízněte posunutím rohů



POSTUP

Vypočítejte první derivaci

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$$

Najděte $\frac{dy}{dx}$ podle vzorce $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$

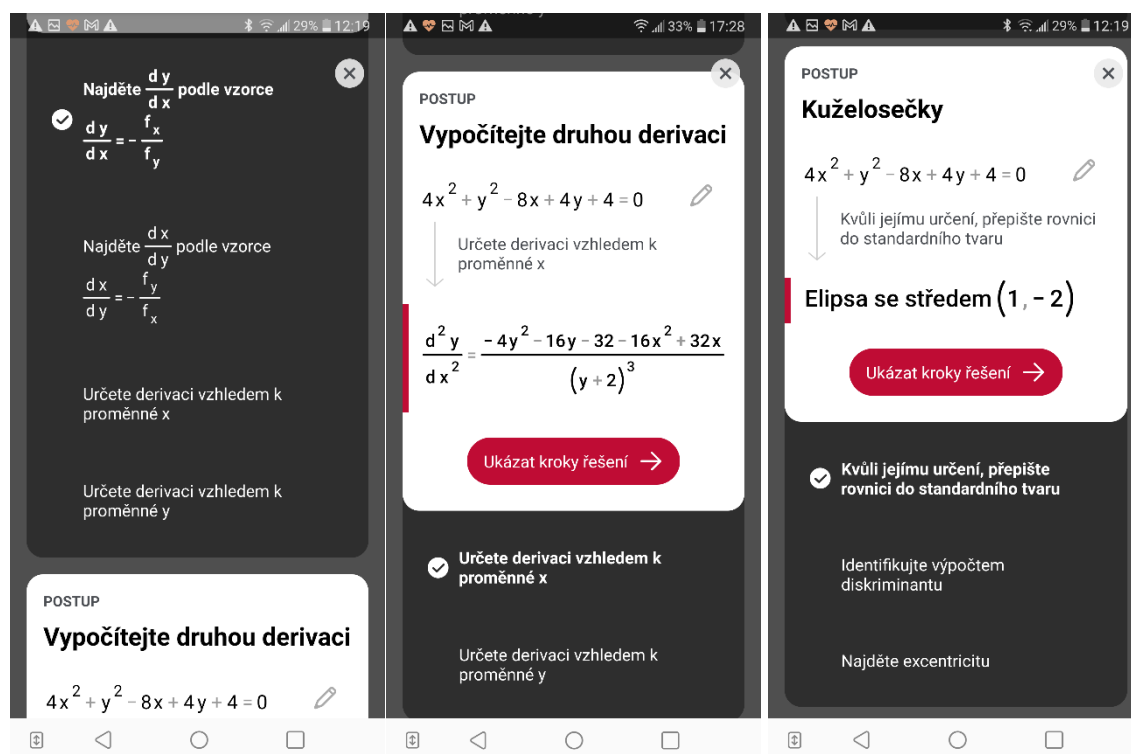
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 4x}{y + 2}$$

Ukázat kroky řešení →



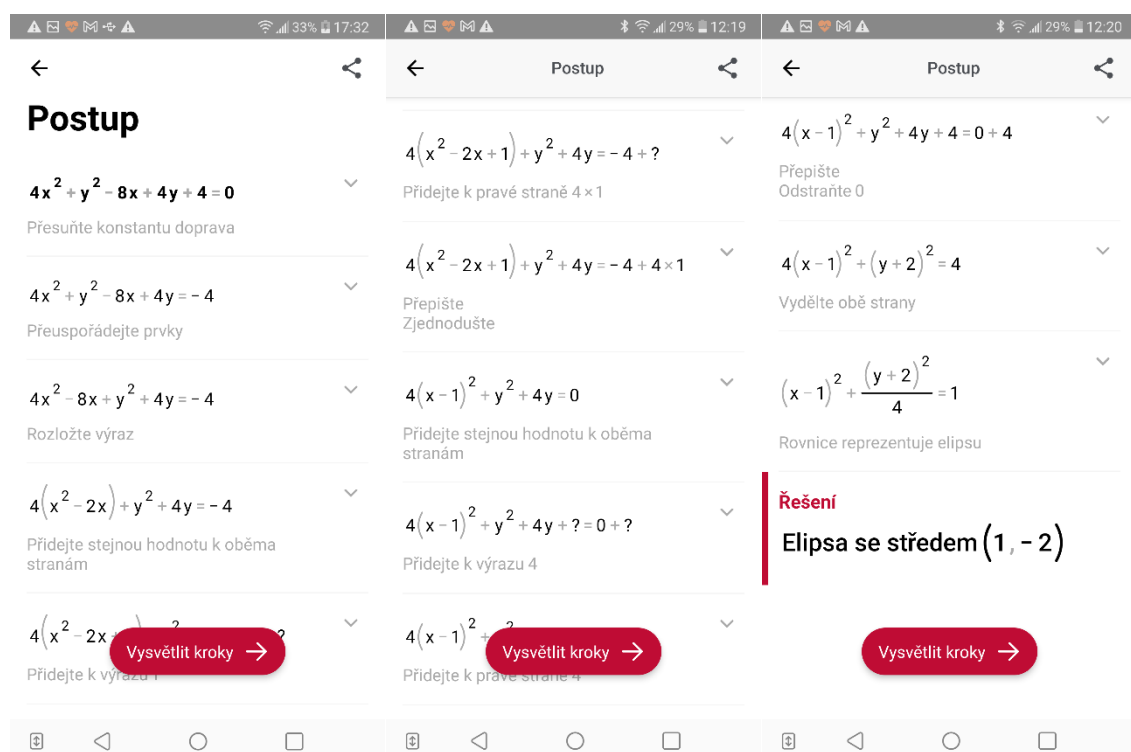
Aplikaci se podařilo přepsat zadání správně, ale jeho řešení se vůbec netýká našeho problému (ani nevíme, co je derivace, chceme středový tvar rovnice elipsy).

Ačkoliv se zdá, že na první obrazovce je všechno, co program o naší rovnici zjistil, je možné prstem pokračovat dolů na další stránky.



Na čtvrté obrazovce je informace, že program rozpoznal v naší rovnici elipsu.

Podíváme se na podrobnosti (stiskneme *Ukázat kroky řešení*).



Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Martin Krynický.

Koordinováno a recenzováno pracovní skupinou Národního kabinetu Matematika a její aplikace.

Dostupné z Metodického portálu www.rvp.cz, ISSN: 1802-4785. Provozuje Národní pedagogický institut České republiky.

V posledním kroku je vidět konečná úprava na rovnici elipsy ve středovém tvaru, ze kterého dokážeme vyčíst velikosti poloos.

Jednotlivé kroky je možné si nechat vysvětlit pomocí šipky vpravo *Vysvětlit kroky řešení*.

$$4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

Vydělte obě strany

$$(x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$



Rovnice může být zapsána ve tvaru $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$, čili představuje elipsu se středem $(1, -2)$



Elipsa se středem $(1, -2)$



Řešení

Elipsa se středem $(1, -2)$



Další



Program Photomath dokáže převést obecnou rovnici elipsy do středového tvaru a z něj vyčíst souřadnice středu elipsy. Program také dokáže určit i excentricitu elipsy.

Kuželosečky



$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$$



Najděte excentricitu

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e \approx 0,866025$$

Ukázat kroky řešení →

Kvůli jejímu určení, přepište rovnici do standardního tvaru

Identifikujte výpočtem diskriminantu



Najděte excentricitu



Pokud se podaří zabránit volné výměně informací ve třídě, část žáků napadne odscrollovat dolů a úpravu na středovou rovnici najdou, část zůstane na první obrazovce a bude tvrdit, že program s obecnou rovnicí elipsy pracovat neumí. Když se tito žáci dovědí, že program příklad řešit umí, za chvíli ho najdou. Stejně tak se všem povede za nějaký čas najít celou středovou rovnici, ze které pak jdou vyčíst velikosti poloos.

Jediné problémy, které se objevují, jsou spojeny s nečitelným písmem. Nakonec je to docela vtipné, že i při použití počítačů záleží na tom, jestli dokážete něco napsat čitelně.

Pokud program nenačte rovnici správně, můžeme ji zkusit vyfotografovat ještě jednou, napsat znova a čitelněji, nebo stisknout na symbol tužky vedle rovnice a rovnici upravit v editoru (*Kalkulačka*).

Kalkulačka

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 4x}{y + 2}$$

Ukázat řešení →

abc

+ -
x ÷

f(x) e
log ln

sin cos
tan cot

lim dx
∫ ∑ ∞

()	>	7	8	9	÷
$\frac{\square}{\square}$	$\sqrt{\square}$	4	5	6	×
$\square^2$	x	1	2	3	-
π	%	0	,	=	+

Možnost doeditování zadání je velmi užitečná (nejen při opravách chyb načítání, ale zejména při měnění původního zadání, kdy není nutné neustále psát nové verze na papír) a je třeba na ni žáky upozornit.

Úloha 4: Úpravou na středový tvar rozhodni, které z uvedených rovnic jsou rovnicí elipsy. U všech nalezených elips urči poloosy, střed (v případě dostatku času i souřadnice vrcholů a ohnisek). Využijvej program Photomath.

a) $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$

b) $x^2 + 4y^2 + 6x - 16y + 16 = 0$

c) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y + 14 = 0$

d) $25x^2 + 16y^2 - 100x + 32y + 115 = 0$

e) $x^2 + 3x + 3y^2 = 0$

a) $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$

← Postup →

Přepište
Zjednodušte

$$4(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 36$$

Vydělte obě strany

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Rovnice reprezentuje elipsu

Řešení

Elipsa se středem $(-2, 1)$

Vysvětlit kroky →

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \Rightarrow \text{„ležatá“ elipsa.}$$

$$S[-2;1], a=3, b=2, e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$$

Hlavní vrcholy (posunutě od středu o a ve vodorovném směru): $A[1;1]$, $B[-5;1]$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Martin Krynický.

Koordinováno a recenzováno pracovní skupinou Národního kabinetu Matematika a její aplikace.

Dostupné z Metodického portálu www.rvp.cz, ISSN: 1802-4785. Provozuje Národní pedagogický institut České republiky.

Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o b ve svislém směru): $C[-2;3]$; $D[-2;-1]$.

Ohniska (posunutá od středu o e ve vodorovném směru): $F[-2+\sqrt{5};1]$, $E[-2-\sqrt{5};1]$.

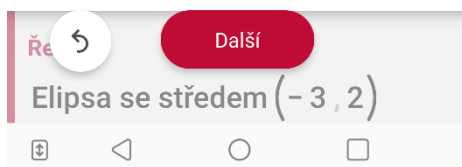
b) $x^2 + 4y^2 + 6x - 16y + 16 = 0$



$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

Rovnice může být zapsána ve tvaru $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, čili představuje elipsu se středem $(-3, 2)$

Elipsa se středem $(-3, 2)$



$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{\frac{9}{4}} = 1 \Rightarrow \text{„ležatá“ elipsa.}$$

$$S[-3;2], a=3, b=\frac{3}{2}, e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Hlavní vrcholy (posunuté od středu o a ve vodorovném směru): $A[0;2]$, $B[-6;2]$.

Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o b ve svislém směru): $C[-3;\frac{7}{2}]$; $D[-3;\frac{1}{2}]$.

Ohniska (posunutá od středu o e ve vodorovném směru): $F[-3+\frac{3}{2}\sqrt{3};2]$, $E[-3-\frac{3}{2}\sqrt{3};2]$.

c) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y + 14 = 0$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Martin Krynický.

Koordinováno a recenzováno pracovní skupinou Národního kabinetu Matematika a její aplikace.

Dostupné z Metodického portálu www.rvp.cz, ISSN: 1802-4785. Provozuje Národní pedagogický institut České republiky.

Část řešení, kterou jsme používali v předchozích bodech, zmizela. Program si se zadáním z nějakého důvodu neví rady. Postupujeme tedy klasicky ručně:

$$9(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 4(y^2 - 2y + 1^2 - 1^2) + 14 = 0$$

$$9(x-1)^2 - 9 \cdot 1 + 4(y-1)^2 - 4 \cdot 1 + 14 = 0$$

$9(x-1)^2 + 4(y-1)^2 = -1 \Rightarrow$ Už víme, proč program neuspěl. Nejde o rovnici elipsy, této rovnici nevyhovuje žádný bod roviny (pro všechny body roviny je levá strana nezáporná).

d) $25x^2 + 16y^2 - 100x + 32y + 115 = 0$

Postup

$$25(x-2)^2 + 16(y^2 + 2y + 1) = -15 + 16 \times 1$$

Přepište
Zjednodušte

$$25(x-2)^2 + 16(y+1)^2 = 1$$

Přeměňte výrazy

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{25}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{1}{16}} = 1$$

Rovnice reprezentuje elipsu

Řešení

Elipsa se středem $(2, -1)$

Vysvětlit kroky →

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{25}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{1}{16}} = 1 \Rightarrow \text{„stojatá“ elipsa.}$$

$$S[2; -1], a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{4}, e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{400}} = \frac{3}{20}.$$

Hlavní vrcholy (posunuté od středu o b ve svislém směru): $C\left[2; -\frac{3}{4}\right]; D\left[2; -\frac{5}{4}\right].$

Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o a ve vodorovném směru): $A\left[\frac{11}{5}; -1\right], B\left[\frac{9}{5}; -1\right].$

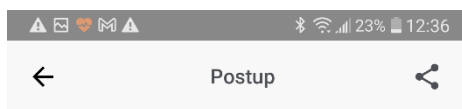
Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Martin Krynický.

Koordinováno a recenzováno pracovní skupinou Národního kabinetu Matematika a její aplikace.

Dostupné z Metodického portálu www.rvp.cz, ISSN: 1802-4785. Provozuje Národní pedagogický institut České republiky.

Ohniska (posunutá od středu o e ve svislém směru): $F\left[2; -\frac{17}{20}\right]$, $E\left[2; -\frac{23}{20}\right]$.

e) $x^2 + 3x + 3y^2 = 0$



$$\frac{4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{9} + \frac{4}{3}y^2 = 1$$

Přeměňte výrazy

$$\frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1$$

Rovnice reprezentuje elipsu

Řešení

Elipsa se středem $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

Vysvětlit kroky →



$$\frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1 \Rightarrow \text{„ležatá“ elipsa.}$$

$$S\left[\frac{3}{2}; 0\right], a = \frac{3}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}, e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Hlavní vrcholy (posunuté od středu o a ve vodorovném směru): $A[3; 0]$, $B[0; 0]$.

Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o b ve svislém směru): $C\left[\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; $D\left[\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Ohniska (posunutá od středu o e ve vodorovném směru): $F\left[\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}; 0\right]$, $E\left[\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}; 0\right]$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Martin Krynický.

Koordinováno a recenzováno pracovní skupinou Národního kabinetu Matematika a její aplikace.

Dostupné z Metodického portálu www.rvp.cz, ISSN: 1802-4785. Provozuje Národní pedagogický institut České republiky.

Kromě bodu c), kde si většina žáků neví rady (nejčastěji tvrdí, že to asi není rovnice elipsy, ale nejsou schopni zdůvodnit proč), se objevuje (zřídka, ale docela pravidelně) problém v bodě a) nebo c) způsobený tím, že žák napíše číslíčko 4 a 9 příliš podobně, nevšimne si, že program obrázek špatně zinterpretoval (obě čísla buď jako 4, nebo jako 9) a hlásí, že jde o rovnici kružnice – v bodě c) tento úkaz vzniká, pokud program načte obě čísla jako čtyřku.

Úloha 5: Na základě výsledků předchozího příkladu a dalšího experimentování s programem Photomath odhadni, jak vypadá obecná rovnice elipsy, pokud:

- a) jde o kružnici,
- b) x-ová souřadnice středu elipsy je nulová,
- c) jde o „stojatou“ elipsu (hlavní osa je rovnoběžná s osou y).

Své odhady se pokus dokázat pomocí úprav obecné rovnice elipsy.

a) jde o kružnici

Obecná rovnice elipsy je rovnicí kružnice, pokud jsou před x^2 i y^2 stejné nenulové koeficienty.

Důkaz:

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0 \quad / : a \text{ (víme } a \neq 0 \text{)}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}y + \frac{d}{a} = 0 \text{ - toto je již obecná rovnice kružnice.}$$

b) x-ová souřadnice středu elipsy je nulová

x-ová souřadnice středu elipsy je nulová, právě když rovnice neobsahuje člen s x (koeficient před x je nulový).

Důkaz: $ax^2 + by^2 + cy + d = 0$. Pokud si představíme další úpravy je zřejmé, že dospějeme k rovnici

ve tvaru: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-m)^2}{b^2} = 1$, která představuje elipsu se středem s nulovou x-ovou souřadnicí.

c) jde o „stojatou“ elipsu (hlavní osa je rovnoběžná s osou y)

Obecná rovnice elipsy představuje „stojatou“ elipsu právě, když koeficient před členem x^2 je větší než koeficient před členem y^2 .

Důkaz: Vyjedeme ze středové rovnice elipsy: $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, kterou můžeme upravit na

obecnou rovnici: $b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2mx - 2a^2ny + m^2b^2 + n^2a^2 - a^2b^2 = 0$.

Protože u „stojaté“ je elipsa, pro kterou platí $b^2 > a^2$, je ihned vidět, že před členem x^2 musí být větší číslo než před členem y^2 .

Při kontrole příkladu je nutné zdůraznit, že ověření odhadu úpravou jedné konkrétní rovnice programem Photomath v žádném případě není důkazem (ani ověření odhadu úpravou stovky rovnic). Pokud do zadání obecné rovnice přidáme alespoň jedno písmenko (jak je použito v důkazech), Photomath přestane rovnici upravovat jako rovnici kuželosečky a snaží se ji pouze řešit jako kvadratickou rovnici s parametrem.

Předchozí příklad má dva cíle:

rychlé experimentování s programem (nejrychleji přepisováním zadání v editoru, bez neustálého zapisování nových rovnic na papír), které umožňuje pohodlně zkoumat mnoho možností, ukázka toho, že schopnost upravovat algebraické výrazy je při důkazech programem *Photomath* zatím nenahraditelná.

Středová i obecná rovnice elipsy je podobná odpovídající rovnici kružnice. Analogicky také převádíme jednu na druhou.